数理解析研究所講究録
886巻 1994年 201-213

On the sum of four cubes and a product.

Koichi Kawada (University of Tsukuba)
川田 浩一 (筑波大学大学院)

§1. はじめに。

加法的整数論と呼ばれる分野では，Goldbach問題，双子素数問題，Waring問題，加法的約数問題などのように，素数や，平方数，立方数などの巾乗数，あるいは指定された個数の因子の積による和（または差）の形で，自然数を表す問題を扱う。上に例として挙げた有名な問題はいずれも，素数だけの和，立方数だけの和，といったように一種類のタイプの数の和に関する問題であるが，それ以外に，素数と2個の平方数の和などのように異なった種類の数の和（mixed sum などといわれる）に関しても多くの研究がある。

単に mixed sum といってもいろいろな形がありうる。が，自然数Nを指定された形の和で表すときの表し方の個数に対する漸近式（asymptotic formula）を得ることを目標とした場合，この分野での有力な方法である Hardy-Littlewoodの circle method に関してすでに得られている結果を用いて簡単に扱えるものを

除くと，自然数Nの mixed sum による表し方として次の四種類がある。

（ア）$N=m_1^2+m_2^3+m_3^5$ のようないくつかの巾乗数の和。

（イ）$N=p+$（いくつかの巾乗数の和）の形。（ただし，以下 p は常に素数を表す。）

（ウ）$N=n_1 n_2 \cdots\cdots n_\ell+$（いくつかの巾乗数の和）の形。（$\ell\geq 2$, n_j は自然数）

（エ）$N=p+n_1 n_2 \cdots\cdots n_\ell$ の形。（$\ell\geq 2$, n_j は自然数）

このうち本稿では，（イ）および（ウ）の形について扱う。内容の詳しい部分については，プレプリント［6］を参照されたい。

§2. circle method を用いる場合。

自然数Nに対して，

$$N=p+m_1^k+m_2^k+\cdots\cdots+m_u^k \quad (p\text{は素数},\ k\geq 2,\ m_j\text{は自然数})$$

の解の個数を $r_{k,u}(N)$ とし，

$$N=n_1 n_2\cdots\cdots n_\ell+m_1^k+m_2^k+\cdots\cdots+m_u^k \quad (\ell\geq 2,\ k\geq 2,\ n_j, m_j\text{は自然数})$$

の解の個数を $R_{\ell,k,u}(N)$ とする。これらを扱う際には，u は小さくなるほど，また ℓ は大きくなるほど，問題は難しくなる。

$r_{k,u}(N)$ および $R_{\ell,k,u}(N)$ に対して予想される漸近式がほとんどすべてのNについて成立することは，$u=1$ の場合の Miech

($k=2$) および筆者 ($k\geq 3$) の議論によりわかっている。そこで, u をどのくらい大きくすれば, すべての (十分大きい) N に対して漸近式を示すことができるか, を考えることにする。まず, この§2では circle method を用いてこの問題を扱う際のポイントについて触れておく。

次のように関数を定義する。

$$P(\alpha)=\sum_{p\leq N} e(p\alpha), \quad D_\ell(\alpha)=\sum_{n\leq N} d_\ell(n)e(n\alpha), \quad F_k(\alpha)=\sum_{m\leq N^{1/k}} e(m^k\alpha)$$

ここで, $e(\alpha)=e^{2\pi i\alpha}$ であり, $d_\ell(n)$ は自然数 n を ℓ 個の自然数の積として $n=n_1\cdot n_2\cdot\cdots\cdots n_\ell$ と表すときの因子の組 $(n_1, n_2, \cdots\cdots, n_\ell)$ の個数である。すると,

$$r_{k,u}(N)=\int_0^1 P(\alpha)F_k(\alpha)^u e(-N\alpha)\,d\alpha,$$

$$R_{\ell,k,u}(N)=\int_0^1 D_\ell(\alpha)F_k(\alpha)^u e(-N\alpha)\,d\alpha$$

とかける。どちらでも同様なので, しばらく $R_{\ell,k,u}(N)$ についてのみかくことにする。

パラメーター Q_1, Q (これらはあとでうまく選ぶわけだが) に対して,

$$\mathfrak{M}=\bigcup_{q\leq Q_1}\ \bigcup_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\left[\frac{a}{q}-\frac{1}{qQ},\ \frac{a}{q}+\frac{1}{qQ}\right]$$

$$\mathfrak{m}=\left[\frac{1}{Q},\ 1+\frac{1}{Q}\right]\setminus\mathfrak{M}$$

と定義し，

$$I_{\mathfrak{M}} = \int_{\mathfrak{M}} D_\ell(\alpha) F_k(\alpha)^u e(-N\alpha)\, d\alpha,$$

$$I_{\mathfrak{m}} = \int_{\mathfrak{m}} D_\ell(\alpha) F_k(\alpha)^u e(-N\alpha)\, d\alpha$$

とすれば，

$$R_{\ell,k,u}(N) = I_{\mathfrak{M}} + I_{\mathfrak{m}}$$

となる。$R_{\ell,k,u}(N)$の予想される大きさは$N^{u/k}(\log N)^{\ell-1}$の定数倍くらいなので，$R_{\ell,k,u}(N)$の漸近式を示すためには，

$$I_{\mathfrak{M}} = (\text{期待される主項}) + o\left(N^{\frac{u}{k}}(\log N)^{\ell-1}\right)$$

$$I_{\mathfrak{m}} = o\left(N^{\frac{u}{k}}(\log N)^{\ell-1}\right) \qquad \cdots\cdots ①$$

を示せばよいわけである。この2つを比べると後者のほうが難しく，結局$R_{\ell,k,u}(N)$に対する漸近式が得られるためのuの条件は，①が示せるuの条件ということになる。そこで，いわゆる minor arc 上の積分$I_{\mathfrak{m}}$をどうおさえるかが問題になる。

そのI$_{\mathfrak{m}}$をおさえる簡単な方法は二つあり，一つは Cauchy-Schwartz の不等式を用いて，

$$|I_{\mathfrak{m}}| \leq \left(\int_0^1 |D_\ell(\alpha)|^2 d\alpha\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathfrak{m}} |F_k(\alpha)|^{2u} d\alpha\right)^{\frac{1}{2}}$$

とするものである。ここで，

$$\int_0^1 |D_\ell(\alpha)|^2 d\alpha = \sum_{n\leq N} d_\ell(n)^2 \ll N(\log N)^{\ell^2-1}$$

であるから，①を示すには，任意に固定した正の定数Aに対して，

$$\int_{\mathfrak{m}} |F_k(\alpha)|^{2u} d\alpha \ll N^{\frac{2u}{k}-1} (\log N)^{-A} \quad \cdots\cdots ②$$

が示せれば十分である。この②は，大雑把にいうと，Nを2u個のk乗数の和として表すWaring問題について，その表し方の個数に対する漸近式が示せる，ということである。

例えば，Huaの不等式により $2u \geq 2^k+1$ ならば②は示せるので，

$u \geq 2^{k-1}+1$ ならば $R_{l,k,u}(N)$ の漸近式は示せる

ということになる。

もう一つの方法は，

$$|I_{\mathfrak{m}}| \leq \max_{\alpha\in\mathfrak{m}} |D_l(\alpha)| \int_0^1 |F_k(\alpha)|^u d\alpha$$

とするもので，これは例えば

$u = 2^{k-1}$, $l \leq k-1$

のときに②を，したがって $R_{l,k,u}(N)$ の漸近式を与える。

§3. $R_{l,k,u}(N)$ について。

さて，$R_{l,k,u}(N)$ を初めて扱ったのはPageである。彼の議論[8]，[9]は circle method に基づくもので，それにより $k=2$ のとき，$u\geq 3$，$l\geq 2$ および $u=2$，$l=2$ の場合に $R_{l,2,u}(N)$ の漸近式が示された。$k=2$ の場合はその後 Hooley [3] により $u=1$，$l=2$ の場合が解決され，Linnik [7] は彼の dispersion method により $u=2$，$l\geq 3$ の場合も扱えることを示した。以上

をまとめると（下の図1参照），$k=2$ の場合に残っているのは $u=1$, $l\geq 3$ のときとなる。

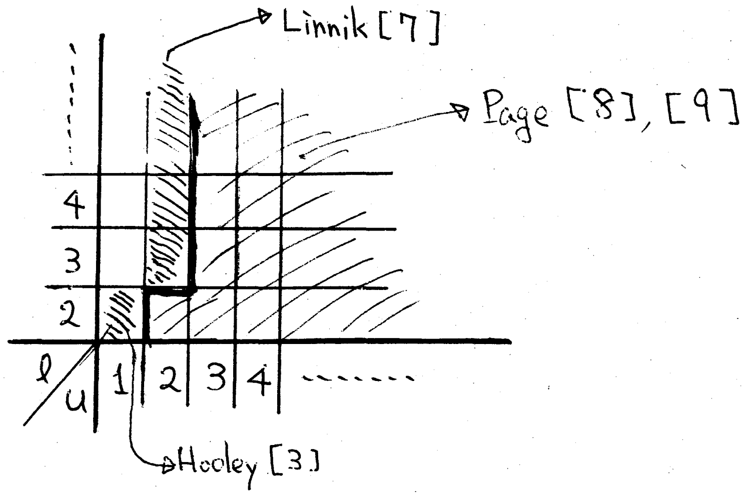

図1. $k=2$ のときの $R_{l,2,u}(N)$ の漸近式の示された部分

次に $k=3$ の場合を考える。§2で示したように，

$u\geq 5$ および $u=4$, $l=2$

のときは circle method により $R_{l,3,u}(N)$ の漸近式が比較的容易に証明できる。その限界を越えるため，Hooley は circle method と異なるアプローチを考え，その方法によって

$u=4$, $l=3$ ([4]) および $u=3$, $l=2$ ([5])

の場合を解決した（図2）。

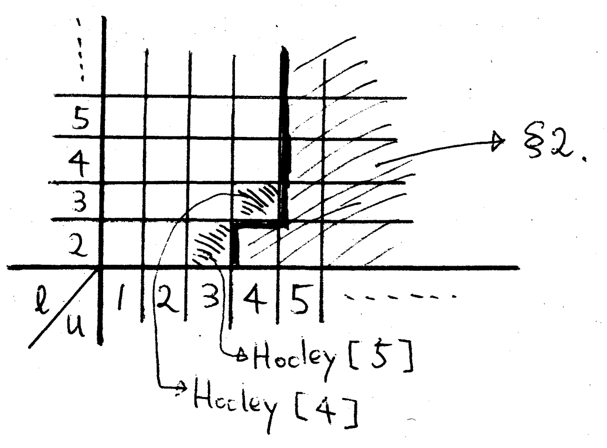

図2. $k=3$ のときの $R_{l,3,u}(N)$ の漸近式の示された部分

本稿で報告する主結果の一つは，$u=4,\ l\geq 3$ の場合である。

定理 1. $l\geq 3$ に対して，

$$R_{l,3,4}(N)=N^{\frac{4}{3}}\sum_{j=0}^{2}\xi_l^{(j)}(N)(\log N)^{l-1-j}+O\left(N^{\frac{4}{3}}(\log N)^{l-4}(\log\log N)^{\frac{l(l-1)(l+4)}{6}+3}\right)$$

ここで $\xi_l^{(j)}(N)$ は具体的に表示できる数で，$\xi_l^{(j)}(N)\ll 1$，また $\xi_l^{(0)}(N)\gg 1$ をみたす。O記号や$\ll$記号に含まれる定数は l のみに依存する。

$l=3$ の場合，この定理1は[4]に含まれる Hooley の結果の改良になっている。

§4. $r_{k,u}(N)$ について。

$k=2$の場合は，$u\geq 3$なら§2で扱ったように circle method でできるわけだが，その限界をこえて Linnik[7] によって $r_{2,2}(N)$ の漸近式が示されている。

$k=3$の場合は，§2で扱ったようにできる限界は $u\geq 5$ である。$u=4$に対しては，十分大きいNに対して $r_{3,4}(N)>0$ となること，つまり十分大きい自然数は1つの素数と4つの立方数の和として表わせることは知られている。これは Davenport [1] による「ほとんどすべての自然数は4つの立方数の和と

して表せる」という形の結果から容易に導かれるものである。このr$_{3,4}(N)$に対しての漸近式を，定理1と同じ方法によって示すことができる。

定理2.

$$r_{3,4}(N) = \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)^3 \mathfrak{S}_0(N) \int_2^N \frac{(N-t)^{\frac{1}{3}}}{\log t}\,dt + O\left(\frac{N^{\frac{4}{3}}(\log\log N)^4}{(\log N)^4}\right)$$

ここで Γ はガンマ関数を表し，$\mathfrak{S}_0(N)$ は特異級数と呼ばれる具体的に表示できる数で，$1 \ll \mathfrak{S}_0(N) \ll 1$ をみたす。

§5. 証明の概略。

1986年，Vaughan [10] はWaring問題の研究において，circle methodに関して新しい巧妙な方法を開発した。それによって，Huaの結果を改良して $2u=2^k$，つまり $u=2^{k-1}$ に対して不等式②が証明された（$k \geq 3$）。ただし，②における定数Aはいくらでも大きくとれるわけではなく，ある正の定数Aに対して②を示したのである。例えば $k=3$ の場合は $0<A<1$ でなければならない。よって§2で示したようにCauchy-Schwartzの不等式を用いて $R_{\ell,3,4}(N)$ や $r_{3,4}(N)$ の扱いをすぐにWaring問題のVaughanの結果に帰着することはできない。そこで，この点にもう一つ工夫を加えるわけである。

いま，適当に固定する正の定数 $B\,(\geq 5)$ に対し，

$$\mathcal{A}=\{m\leq N^{\frac{1}{3}}\,;\ m\text{は}\ (\log N)^{5B}<p\leq N^{\frac{1}{21}}\ \text{なる素因数}\ p\ \text{をもたない。}\}$$

とし，$\overline{\mathcal{A}}$ を $N^{\frac{1}{3}}$ 以下の自然数全体に対する $\mathcal{A}$ の補集合，つまり，

$$\overline{\mathcal{A}}=\{m\leq N^{\frac{1}{3}}\,;\ m\text{は}\ (\log N)^{5B}<p\leq N^{\frac{1}{21}}\ \text{なる素因数}\ p\ \text{をもつ。}\}$$

とする。また集合 $\mathcal{B}$ に対して

$$F(\alpha;\mathcal{B})=\sum_{\substack{m\leq N^{1/3}\\ m\in\mathcal{B}}} e(m^3\alpha)$$

とおく。すると Vaughan[10] の方法は，任意の集合 $\mathcal{B}$ に対して，

$$\int_{\mathfrak{m}} |F(\alpha;\overline{\mathcal{A}})|^2\,|F(\alpha;\mathcal{B})|^4\,|F_3(\alpha)|^2\,d\alpha \ll N^{\frac{5}{3}}(\log N)^{-B} \quad \cdots\cdots③$$

を示すことができるのである。もちろん $\mathfrak{m}$ をうまく定義して，つまりパラメーター Q_1, Q をうまく選んで，ということである。そこで

$$V_1(N)=\sum_{\substack{m_1^3+m_2^3+m_3^3+m_4^3<N\\ m_1,m_2,m_3\in\mathcal{A}}} d_\ell(N-m_1^3-m_2^3-m_3^3-m_4^3)$$

とおき，

$$V_0(N)=R_{\ell,3,4}(N)-V_1(N)$$

とすると，

$$V_0(N)=\int_0^1 D_\ell(\alpha)F_3(\alpha)^4 e(-N\alpha)\,d\alpha-\int_0^1 D_\ell(\alpha)F(\alpha;\mathcal{A})^3 F_3(\alpha)e(-N\alpha)\,d\alpha$$

となる。この右辺の2つの積分を major arc $\mathfrak{M}$ 上の積分と，minor arc $\mathfrak{m}$ 上の積分とに分けると，§2で述べたように $\mathfrak{M}$ 上の積分については，知られている結果を用いて十分な漸近式を得ることができる。$\mathfrak{m}$ 上の積分については，

$$\int_{\mathfrak{m}} D_\ell(\alpha)\{F_3(\alpha)^3 - F(\alpha;\mathcal{A})^3\} F_3(\alpha) e(-N\alpha)\, d\alpha$$

$$= \int_{\mathfrak{m}} D_\ell(\alpha) F(\alpha;\overline{\mathcal{A}}) \{F_3(\alpha)^2 + F_3(\alpha)F(\alpha;\mathcal{A}) + F(\alpha;\mathcal{A})^2\} F_3(\alpha) e(-N\alpha)\, d\alpha$$

$$\ll \left(\int_0^1 |D_\ell(\alpha)|^2 d\alpha\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathfrak{m}} |F(\alpha;\overline{\mathcal{A}})|^2 \{|F_3(\alpha)|^4 + |F(\alpha;\mathcal{A})|^4\} |F_3(\alpha)|^2 d\alpha\right)^{\frac{1}{2}}$$

とすれば，最後の部分に③を用いて

$$\ll \left(N(\log N)^{\ell^2-1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(N^{\frac{5}{3}}(\log N)^{-B}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ll N^{\frac{4}{3}} (\log N)^{-\frac{1}{2}(B-\ell^2+1)}$$

したがってBを大きくとっておけば minor arc $\mathfrak{m}$ 上の積分に対して十分な評価が得られる。これによって $r_0(N)$ に対しての漸近式を示すことができる。

一方，ふるいの方法によって，集合 $\mathcal{A}$ に含まれる自然数の個数 $\#\mathcal{A}$ について，

$$\#\mathcal{A} \ll \frac{N^{\frac{1}{3}}\log\log N}{\log N}$$

を示すことができる。それをもとにして，

$$V_1(N) \ll N^{\frac{4}{3}} (\log N)^{l-4} (\log\log N)^{c_l} \quad (c_l \text{ は } l \text{ のみに依存する定数})$$

が証明できる。以上をあわせて，

$$R_{l,3,4}(N) = V_0(N) + V_1(N)$$

に対して，目標とする漸近式を得ることができるわけである。
$r_{3,4}(N)$に対する証明も同様である。

上の方法は，不等式②において定数Aを十分大きくとれなくても，Vaughanによる結果の場合は，$R_{l,k,u}(N)$および$r_{k,u}(N)$についての漸近式を与えることを示している。

このVaughanの方法とHeath-Brown [2] のHuaの不等式の改良の方法を合わせると，$k \geq 6$ならば $2u \geq \frac{7}{8} \cdot 2^k$，つまり $u \geq 7 \cdot 2^{k-4}$ に対して不等式②を示すことができる（ある正の定数Aに対して，であるが）。したがって上に示した方法と合わせることで，

$$u \geq 2^{k-1} \quad (3 \leq k \leq 5)$$

$$u \geq 7 \cdot 2^{k-4} \quad (6 \leq k \leq 9)$$

に対して $R_{l,k,u}(N)$，$r_{k,u}(N)$ の漸近式を得ることができる。
$k \geq 10$ の場合は，Wooley による Vinogradov method の改良 [11] を用いて，§2 の議論と合わせた方がいい結果となる。

References.

[1] Davenport, H. "On Waring's problem for cubes", Acta Math., 71(1939) pp. 123–143.

[2] Heath-Brown, D.R. "Weyl's inequality, Hua's inequality and Waring's problem", J. London Math. Soc. (2) 38 (1988) pp. 216–230

[3] Hooley, C. "On the representation of a number as the sum of a square and a product", Math. Z. 69 (1958) pp. 211–227.

[4] Hooley, C. "On a new approach to various problems of Waring's type," in Recent Progress in Analytic Number Theory vol. 1 (Academic Press, 1981) pp. 127–191.

[5] Hooley, C. "Waring's problem for two squares and three cubes", J. Reine Angew. Math. 328 (1981) pp. 161–207

[6] Kawada, K. "On the sum of four cubes and a product of k factors", preprint.

[7] Linnik, Ju. V. "An asymptotic formula in an additive problem of Hardy-Littlewood," Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 24 (1960) pp. 629–706. (Russian)

[8] Page, A. "On the representation of a number as a sum of squares and products, I. and II.", Proc. London Math. Soc. (2) 36 (1933) pp. 241–256 and pp. 471–484.

[9] Page, A. "On the representation of a number as a sum of squares and products, III.", Proc. London Math. Soc. (2) 37 (1934) pp. 1–16.

[10] Vaughan, R.C. "On Waring's problem for cubes", J. Reine Angew. Math. 365 (1986) pp. 122 – 170.

[11] Wooley, T.D. "On Vinogradov's mean value theorem", Mathematika, 39 (1992) pp. 379 – 399